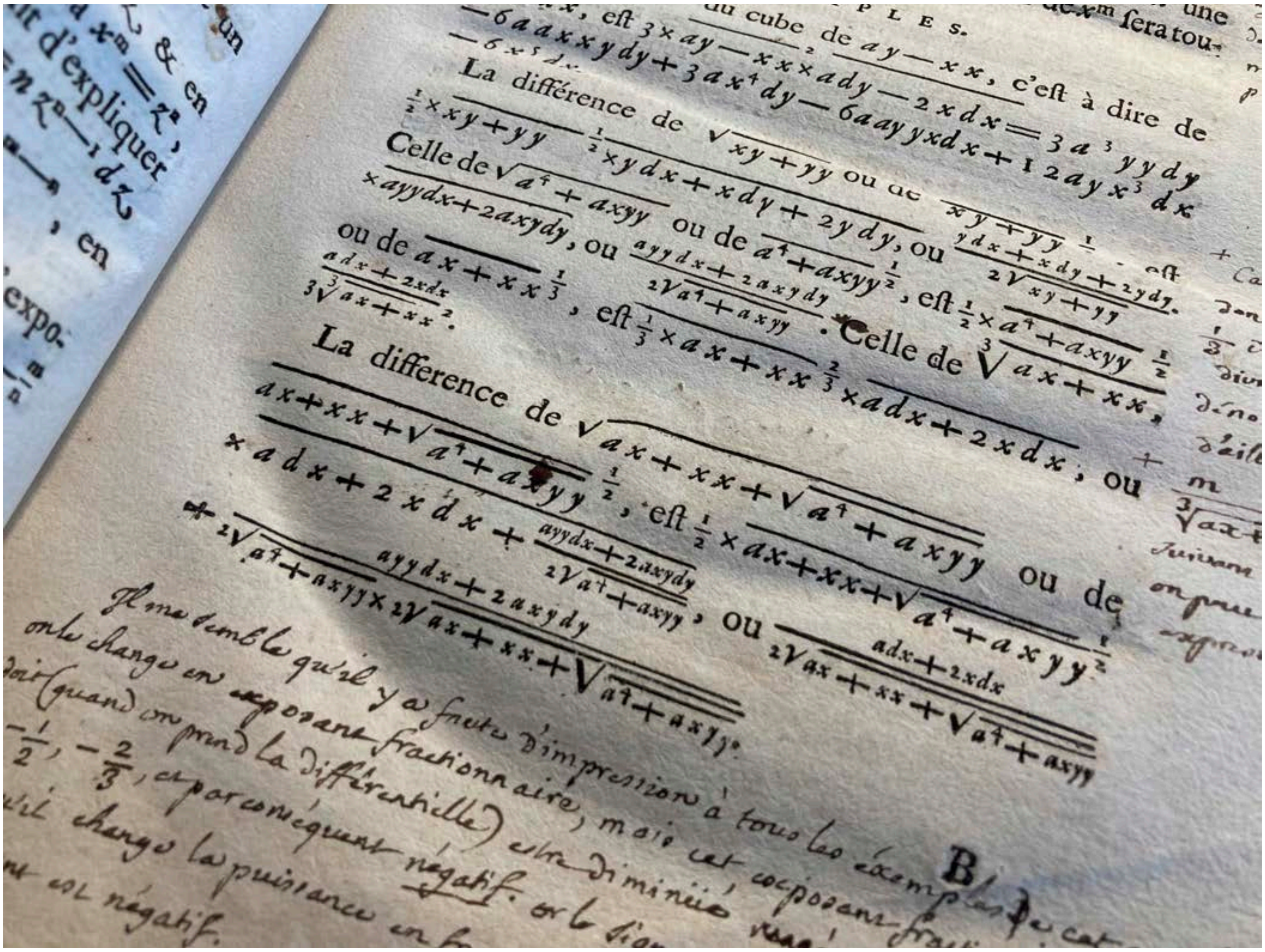
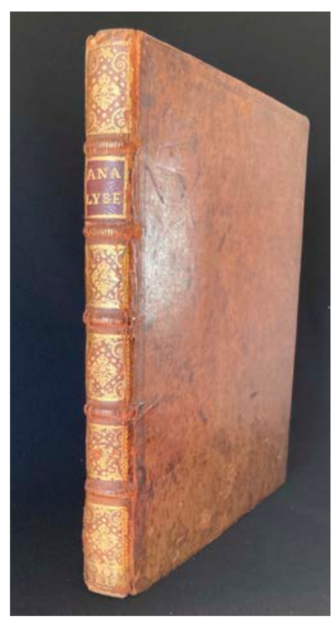
An annotated copy of the first textbook on differential calculus





L'HÔPITAL, Guillaume-François-Antoine de St Mesme, marquis de.
Analyse des Infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes.

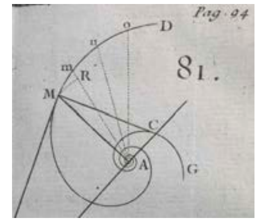
Paris, François Montalant, 1715. Second edition.

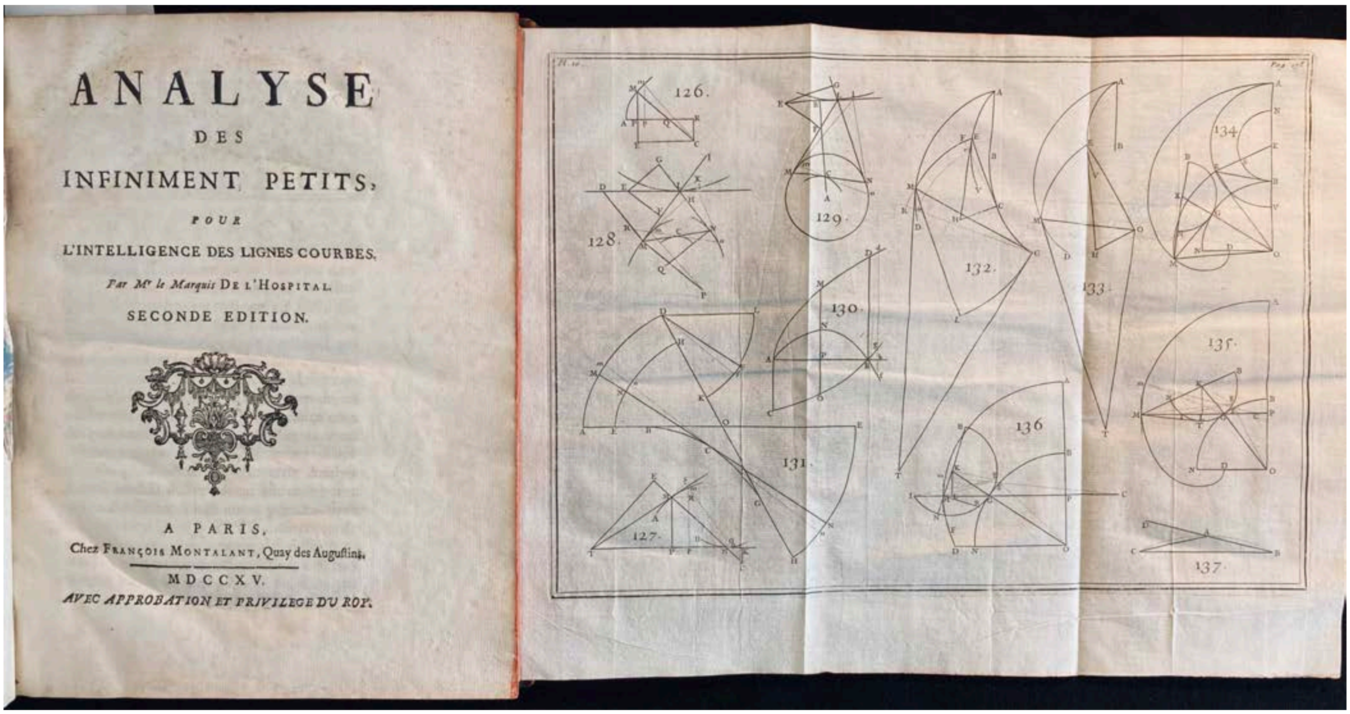
4°: a-b^4 A-Z^4 [$3 (-Z3) signed]; [i-iii] iv-xv [xvi], [1] 2-181 [182], [2] pp. **11 large folding plates**, by Berey, with 156 engraved diagrams keyed to the text. Contemporary marbled calf, raised bands on gilt decorated spine with red morocco title label, triple-blind rules to the boards, the edges of which are in gilt, page edges stained red, marbled end papers. Corners, head and tail have minor little bumps. Text block is a very near fine large example, a lovely copy.

With a dozen pages of annotations and corrections by a skilled mathematician, written in a neat legible hand.

$2,500

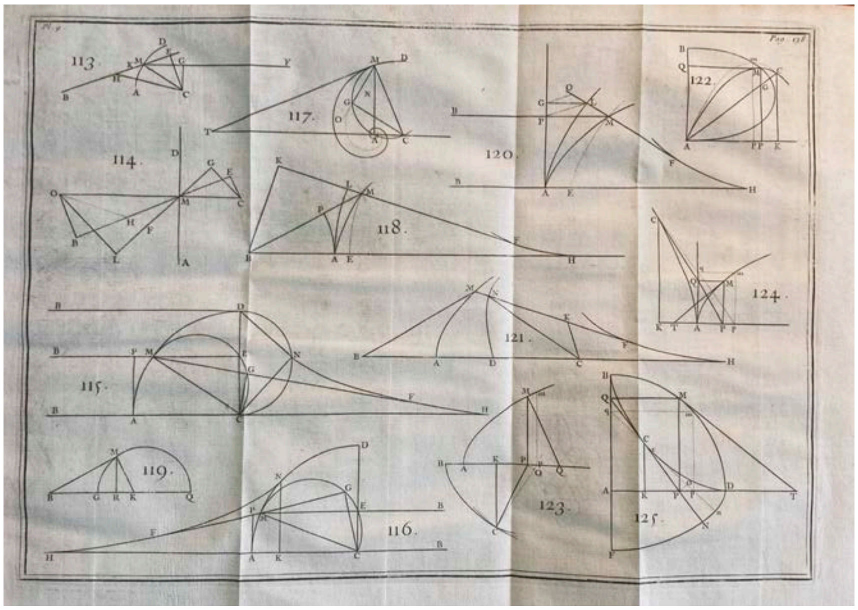
The mathematician Guillaume de L'Hôpital (1661-1704) wrote the first textbook for the study of differential calculus—Leibniz, with whom l'Hôpital corresponded, was engaged in writing a book (unfinished) on integral calculus, thus l'Hôpital, as he explains in his valuable preface, focused on differential calculus.

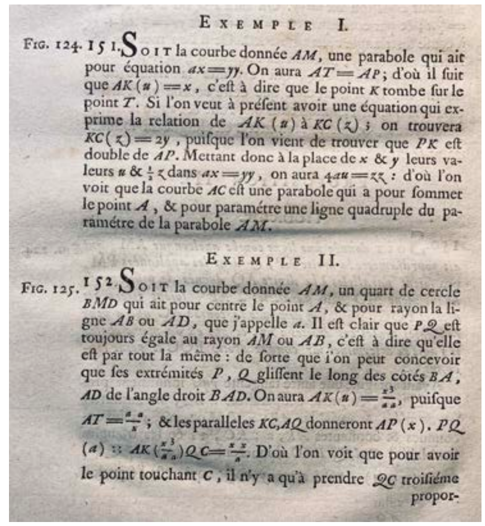




This is the important second edition, following the 1696 first edition. This book played a considerable role in the dissemination of the theory of differential calculus, which at the end of the 17th century had only been mastered by a few mathematicians. Guillaume de l'Hôpital (1661-1704) had learned the basic principles from Gottfried Leibniz and Johann Bernoulli, two mathematicians who, like René Descartes and François Viète, are mentioned by the author in the insightful preface where l'Hôpital situates his work in relation to the discoveries of his contemporaries, and in the history of mathematics generally. We also find here " l'Hôpital's rule"-- the celebrated formula for finding the limiting value of a fraction whose numerator and denominator tend to zero (p. 145, section 9, proposition 1). Previous scholars have discussed in some detail l'Hôpital's original contributions to this work, in spite of the fact that the author makes his debt to Leibniz and Bernoulli known in the introduction. It is known that l'Hôpital paid Bernoulli a stipend to regularly share advanced research notes. Importantly, it has been universally recognized that l'Hôpital's work stands out in pedagogical brilliance, evident in the arrangement, presentation, and synthesis of the concepts and theorems presented here made a significant contribution to the study of mathematics well into the 18th century.

Complete with 11 engraved plates of diagrams keyed to explanations in the text
One successful factor of the textbook is the illustrations. The text contains 11 finely illustrated plates with 156 diagrams. Below: each figure is keyed to a description in the text—in this case Figures 124 and 125:





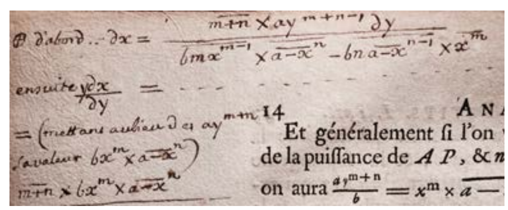
EXEMPLE I.

FIG. 124. 151. SOIT la courbe donnée *AM*, une parabole qui ait pour équation $ax = yy$. On aura $AT = AP$; d'où il fuit que $AK\ (u) = x$, c'eft à dire que le point *K* tombe fur le point *T*. Si l'on veut à préfent avoir une équation qui exprime la relation de $AK\ (u)$ à $KC\ (z)$; on trouvera $KC\ (z) = 2y$, puifque l'on vient de trouver que *PK* eft double de *AP*. Mettant donc à la place de *x* & *y* leurs valeurs *u* & $\frac{1}{2}z$ dans $ax = yy$, on aura $4au = zz$: d'où l'on voit que la courbe *AC* eft une parabole qui a pour fommet le point *A*, & pour paramétre une ligne quadruple du paramétre de la parabole *AM*.

EXEMPLE II.

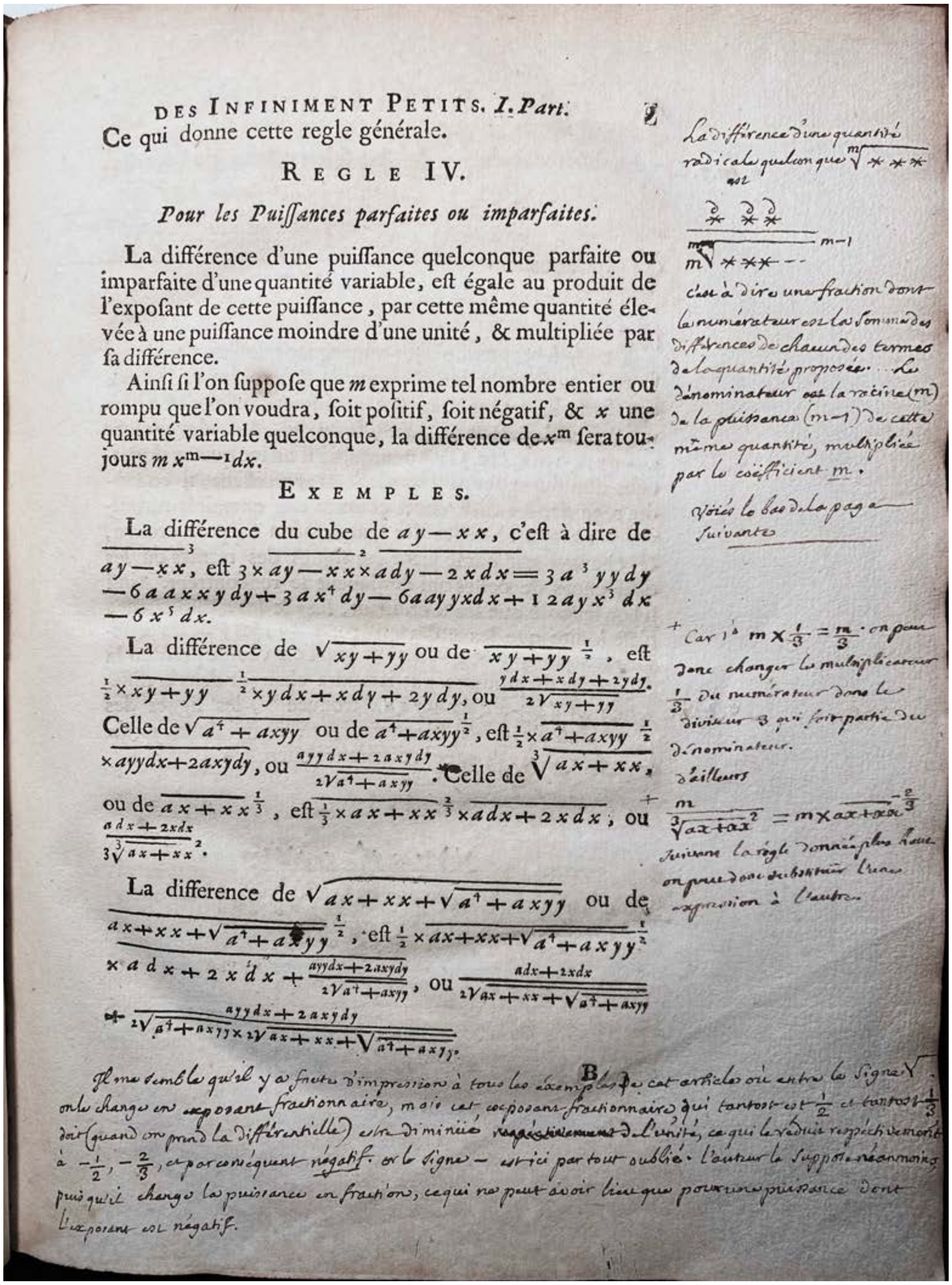
FIG. 125. 152. SOIT la courbe donnée *AM*, un quart de cercle *BMD* qui ait pour centre le point *A*, & pour rayon la ligne *AB* ou *AD*, que j'appelle *a*. Il eft clair que *PQ* eft toujours égale au rayon *AM* ou *AB*, c'eft à dire qu'elle eft par tout la même : de forte que l'on peut concevoir que fes extrémités *P*, *Q* gliffent le long des côtés *BA*, *AD* de l'angle droit *BAD*. On aura $AK\ (u) = \frac{x^3}{aa}$, puifque $AT = \frac{aa}{x}$; & les paralleles *KC*, *AQ* donneront $AP\ (x)$. $PQ\ (a) :: AK\ (\frac{x^3}{aa})\ QC = \frac{xx}{a}$. D'où l'on voit que pour avoir le point touchant *C*, il n'y a qu'à prendre *QC* troifiéme propor-

Annotated by a mathematician at the beginning of the 18th century



Based on the quality of the notes, the annotator was certainly a mathematician, and undoubtedly a contemporary reader who interacted closely with the text (**the typographical errors indicated by the annotator were not corrected by the publisher until the subsequent 1716 third edition**). The notes are of two sorts: 1) commentary on mathematical principles and 2) typographic corrections, the later requiring a sophisticated understanding of the former. The notes are condensed in a precise, scholarly hand in the first two sections of L'Hôpital's work. Initially in Section I: (pp. 5, 9-10) where the rules for differential calculus are provided; and then in Section II (pp. 12-14), which treats the use of differential calculus to find the tangents for all manner of curved lines. There are also further annotations (pp. 43, 46) and corrections to the text (pp. 16, 48).

A working mathematician identifies typographical errors:


DES INFINIMENT PETITS. *I. Part.*

Ce qui donne cette regle générale.

R E G L E IV.

Pour les Puiſſances parfaites ou imparfaites.

La différence d'une puiſſance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable, eſt égale au produit de l'expoſant de cette puiſſance, par cette même quantité élevée à une puiſſance moindre d'une unité, & multipliée par ſa différence.

Ainſi ſi l'on ſuppoſe que m exprime tel nombre entier ou rompu que l'on voudra, ſoit poſitif, ſoit négatif, & x une quantité variable quelconque, la différence de x^m ſera toujours $m x^{m-1} dx$.

E X E M P L E S.

La différence du cube de $ay - xx$, c'eſt à dire de $\overline{ay - xx}^3$, eſt $3 \times \overline{ay - xx}^2 \times \overline{ady - 2xdx} = 3a^3yydy - 6aaxxydy + 3ax^4dy - 6aayyxdx + 12ayx^3dx - 6x^5dx$.

La différence de $\sqrt{xy + yy}$ ou de $\overline{xy + yy}^{\frac{1}{2}}$, eſt $\frac{1}{2} \times \overline{xy + yy}^{\frac{1}{2}} \times \overline{ydx + xdy + 2ydy}$, ou $\frac{ydx + xdy + 2ydy}{2\sqrt{xy + yy}}$.

Celle de $\sqrt{a^4 + axyy}$ ou de $\overline{a^4 + axyy}^{\frac{1}{2}}$, eſt $\frac{1}{2} \times \overline{a^4 + axyy}^{\frac{1}{2}} \times \overline{ayydx + 2axydy}$, ou $\frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy}}$. Celle de $\sqrt[3]{ax + xx}$, ou de $\overline{ax + xx}^{\frac{1}{3}}$, eſt $\frac{1}{3} \times \overline{ax + xx}^{\frac{2}{3}} \times \overline{adx + 2xdx}$, ou $\frac{adx + 2xdx}{3\sqrt[3]{\overline{ax + xx}^2}}$.

La difference de $\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}$ ou de $\overline{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}^{\frac{1}{2}}$, eſt $\frac{1}{2} \times \overline{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}^{\frac{1}{2}} \times \overline{adx + 2xdx + \frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy}}}$, ou $\frac{adx + 2xdx}{2\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}} + \frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy} \times 2\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}}$.

B

La différence d'une quantité radicale quelconque $\sqrt[m]{* * *}$ est $\frac{\partial * \; \partial * \; \partial *}{m\sqrt[m]{* * * --}^{\,m-1}}$ c'est à dire une fraction dont le numérateur est la somme des différences de chacun des termes de la quantité proposée... Le dénominateur est la racine (m) de la puissance $(m-1)$ de cette même quantité, multipliée par le coëfficient m.

Voiés le bas de la page suivante

+ Car 1° $m \times \frac{1}{3} = \frac{m}{3}$. on peut donc changer le multiplicateur $\frac{1}{3}$ du numérateur dans le diviseur 3 qui fait partie du dénominateur.

d'ailleurs

+ $\frac{m}{\sqrt[3]{\overline{ax + ax}^2}} = m \times \overline{ax + xx}^{-\frac{2}{3}}$ suivant la règle donnée plus haut on peut donc substituer l'une expression à l'autre.

Il me semble qu'il y a faute d'impression à tous les exemples de cet article où entre le signe √. on le change en exposant fractionnaire, mais cet exposant fractionnaire qui tantôt est $\frac{1}{2}$ et tantôt $\frac{1}{3}$ doit (quand on prend la différentielle) être diminué respectivement de l'unité, ce qui le réduit respectivement à $-\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, et par conséquent négatif. or le signe – est ici par tout oublié. l'auteur le suppose néanmoins puisqu'il change la puissance en fraction, ce qui ne peut avoir lieu que pour une puissance dont l'exposant est négatif.

A notable example of the annotator's focus: on page 9, Rule no. IV, "différence d'une puissance parfaite ou imparfaite," the upper part of the page (shown at left) includes the annotator's interaction with the text, expanding the mathematical formulas, and applying his own calculations.

Meanwhile, at the bottom of the page, the annotator identifies specific typographical errors, and corrects them, indicating that the annotator was a practicing mathematician and that this textbook was employed in instruction, research, or both. The articulate quality of the explanation of the typos is notable:

" Il me semble qu'il y a une faute d'impression à tous les exemples de cet article où entre le signe √ : on le change en exposant fractionnaire, mais cet exposant fractionnaire, qui tantôt est 1/2 et tantôt 1/3 doit (quand on prend la différentielle) être diminuée de l'unité, ce qui le réduit respectivement à -1/2 , -2/3 et par conséquent négatif or le signe – est ici partout oublié."

> *"It seems to me that there is a printing error in all the examples in this article where the sign √ is entered: it is changed to a fractional exponent, but this fractional exponent, which is sometimes 1/2 and sometimes 1/3 must (when we take the differential) be diminished accordingly, which reduces it respectively to -1/2, -2/3 and consequential negative, here the sign — is here forgotten in each instance. "*

We note two additional small precisions by the annotator, p. 16 and p. 48. The annotator corrects the commentary on figure 7, p. 16, replacing in the text : " Pp ou M = Dx" for "MPp ou R = Dx"—again, an example carried out by a skilled mathematician in a neat hand maintaining the integrity of the text.

Important annotated copy of a seminal work for modern mathematics.

More images below…

de la seconde z par la premiere xy (ce qui donne $xydz$); & partant la différence de xyz sera $yzdx + xzdy + xydz$.

3°. La différence de $xyzu$ est $uyzdx + uxzdy + uxydz + xyzdu$. Ce qui se prouve comme dans le cas précédent en regardant le produit xyz comme une seule quantité. Il en est ainsi des autres à l'infini, d'où l'on forme cette régle.

REGLE II.

Pour les quantités multipliées.

La différence du produit de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres, est égale à la somme des produits de la différence de chacune de ces quantités par le produit des autres.

Ainsi la difference de ax est $x0 + adx$, c'est à dire adx. Celle de $\overline{a+x} \times \overline{b-y}$ est $bdx - ydx - ady - xdy$.

PROPOSITION III.

Problême.

6. PRENDRE *la différence d'une fraction quelconque.*

La différence de $\frac{x}{y}$ est $\frac{ydx - xdy}{yy}$. Car supposant $\frac{x}{y} = z$, on aura $x = yz$, & comme ces deux quantités variables x & yz doivent toujours être égales entr'elles, soit qu'elles augmentent ou diminuent, il s'ensuit que leur différence, c'est à dire leurs accroissemens ou diminutions seront aussi égales entr'elles; & partant * on aura $dx = ydz + zdy$, & $dz = \frac{dx - zdy}{y} = \frac{ydx - xdy}{yy}$ en mettant pour z sa valeur $\frac{x}{y}$. Ce qu'il falloit, &c. d'où l'on forme cette regle.

* Art. 5.

$\cancel{\partial z = \frac{\partial x - z\partial y}{\partial x}}$

$\partial x = y\partial z + z\partial y$

on tire

$\partial z = \frac{\partial x - z\partial y}{y}$

substituant dans le second membre la valeur de z

$\partial z = \frac{\partial x}{y} - \frac{x\partial y}{yy}$

multipliant le premier terme du 2d membre par $\frac{y}{y}$

$\partial z = \frac{y\partial x - x\partial y}{yy}.$

REGLE III.

Pour les quantités divisées, ou pour les fractions.

La différence d'une fraction quelconque est égale au

Ce qui donne cette regle générale.

REGLE IV.

Pour les Puissances parfaites ou imparfaites.

La différence d'une puissance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable, est égale au produit de l'exposant de cette puissance, par cette même quantité élevée à une puissance moindre d'une unité, & multipliée par sa différence.

Ainsi si l'on suppose que m exprime tel nombre entier ou rompu que l'on voudra, soit positif, soit négatif, & x une quantité variable quelconque, la différence de x^m sera toujours $mx^{m-1}dx$.

La différence d'une quantité radicale quelconque $\sqrt[m]{\overline{***}}$ est

$$\frac{\partial{*}\ \partial{*}\ \partial{*}}{m\sqrt[m]{\overline{***\,--}}^{\,m-1}}$$

c'est à dire une fraction dont le numérateur est la somme des différences de chacun des termes de la quantité proposée... Le dénominateur est la racine (m) de la puissance ($m-1$) de cette même quantité, multipliée par le coéfficient $\underline{m}$.

voïés le bas de la page suivante

EXEMPLES.

La différence du cube de $ay-xx$, c'est à dire de $\overline{ay-xx}^{3}$, est $3\times\overline{ay-xx}^{2}\times ady-2xdx = 3a^3yydy - 6aaxxydy + 3ax^4dy - 6aayyxdx + 12ayx^3dx - 6x^5dx$.

La différence de $\sqrt{xy+yy}$ ou de $\overline{xy+yy}^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2}\times\overline{xy+yy}^{\frac{1}{2}}\times ydx+xdy+2ydy$, ou $\frac{ydx+xdy+2ydy}{2\sqrt{xy+yy}}$. Celle de $\sqrt{a^4+axyy}$ ou de $\overline{a^4+axyy}^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2}\times\overline{a^4+axyy}^{\frac{1}{2}}\times ayydx+2axydy$, ou $\frac{ayydx+2axydy}{2\sqrt{a^4+axyy}}$. Celle de $\sqrt[3]{ax+xx}$, + ou de $\overline{ax+xx}^{\frac{1}{3}}$, est $\frac{1}{3}\times\overline{ax+xx}^{\frac{2}{3}}\times adx+2xdx$, ou $\frac{adx+2xdx}{3\sqrt[3]{\overline{ax+xx}^{2}}}$.

+ Car 1° $m\times\frac{1}{3}=\frac{m}{3}$. on peut donc changer le multiplicateur $\frac{1}{3}$ du numérateur dans le diviseur 3 qui fait partie du dénominateur.

d'ailleurs

$$\frac{m}{\sqrt[3]{\overline{ax+ax}^{2}}} = m\times\overline{ax+xx}^{-\frac{2}{3}}$$

suivant la règle donnée plus haut on peut donc substituer l'une expression à l'autre.

La difference de $\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}$ ou de $\overline{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2}\times\overline{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}^{\frac{1}{2}}\times adx+2xdx+\frac{ayydx+2axydy}{2\sqrt{a^4+axyy}}$, ou $\frac{adx+2xdx}{2\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}}+\frac{ayydx+2axydy}{2\sqrt{a^4+axyy}\times 2\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}}$.

B

Il me semble qu'il y a faute d'impression à tous les exemples de cet article où entre le signe $\sqrt{\ }$. on le change en exposant fractionnaire, mais cet exposant fractionnaire qui tantost est $\frac{1}{2}$ et tantost $\frac{1}{3}$ doit (quand on prend la différentielle) estre diminuée ~~respectivement~~ de l'unité, ce qui le réduit respectivement à $-\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, et par conséquent $\underline{\text{négatif}}$. or le signe $-$ est ici partout oublié. l'auteur le suppose néanmoins puisqu'il change la puissance en fraction, ce qui ne peut avoir lieu que pour une puissance dont l'exposant est négatif.

*Art. 7. 6. La différence de $\frac{\sqrt[3]{ax+xx}}{\sqrt{xy+yy}}$ ſera ſelon cette regle * & celle des fractions

$$\frac{\frac{adx+2xdx}{3\sqrt[3]{ax+xx}^{\,2}}\times\sqrt{xy+yy}-\frac{ydx-xdy-2ydy}{2\sqrt{xy+yy}}\times\sqrt[3]{ax+xx}}{xy+yy}.$$

REMARQUE.

8. IL eſt à propos de bien remarquer que l'on a toujours ſuppoſé en prenant les différences, qu'une des variables x croiſſant, les autres y, z, &c. croiſſoient auſſi ; c'eſt à dire que les x devenant $x+dx$, les y, z, &c. devenoient $y+dy$, $z+dz$, &c. C'eſt pourquoi s'il arrive que quelques-unes diminuent pendant que les autres croiſſent, il en faudra regarder les différences comme des quantités négatives par rapport à celles des autres qu'on ſuppoſe croître, & changer par conſéquent les ſignes des termes où les différences de celles qui diminuent ſe rencontrent. Ainſi ſi l'on ſuppoſe que les x croiſſant, les y & les z diminuent, c'eſt à dire que les x devenant $x+dx$, les y & les z deviennent $y-dy$ & $z-dz$, & que l'on veuille prendre la différence du produit xyz ; il faudra changer dans la diffé-

*Art. 5. rence $xydz+xzdy+yzdx$ trouvée *, les ſignes des termes où dy & dz ſe rencontrent : ce qui donne $yzdx-xydz-xzdy$ pour la différence cherchée.

La différence d'une quantité quelconque présentée sous cette forme $\sqrt[m]{\ast\ast+\sqrt[m]{\theta\theta}}$ est

$$\frac{\overset{\partial}{\ast}\,\overset{\partial}{\ast}}{m\sqrt[m]{\ast\ast+\sqrt[m]{\theta\theta}}^{\,m-1}}+\frac{\overset{\partial}{\theta}\,\overset{\partial}{\theta}}{m\sqrt[m]{\theta\theta}^{\,m-1}\times m\sqrt[m]{\ast\ast+\sqrt[m]{\theta\theta}}^{\,m-1}}$$

Il s'en trouve un exemple à la page précédente : c'est le dernier.

$\ast\ast \ldots \theta\theta$ représentent les termes de la quantité ; et $\overset{\partial}{\ast}$, $\overset{\partial}{\theta}$ leur différence.

* *Art.* 8. nue, & qu'il faut changer par conſéquent * dans la différence de l'équation donnée les ſignes de tous les termes où dy ſe rencontre : autrement la valeur de dx en dy ſeroit négative ; & partant auſſi celle de PT ($\frac{ydx}{dy}$). Il eſt mieux cependant, pour ne ſe point embaraſſer, de prendre toujours la différence de l'équation donnée par les regles que
* *Sect.* 1. l'on a preſcrites * ſans y rien changer ; car s'il arrive à la fin de l'opération que la valeur de PT ſoit poſitive, il s'enſuivra qu'il faudra prendre le point T du même côté que le point A origine des x, comme l'on a ſuppoſé en faiſant le calcul : & au contraire ſi elle eſt négative, il le faudra prendre du côté oppoſé. Ceci s'éclaircira par les éxemples ſuivans.

EXEMPLE I.

FIG. 3. 11. 1°. Si l'on veut que $ax = yy$ exprime la relation de AP à PM ; la courbe AM ſera une parabole qui aura pour paramétre la droite donnée a, & l'on aura en prenant de part & d'autre les différences, $adx = 2ydy$, & $dx = \frac{2ydy}{a}$ & PT ($\frac{ydx}{dy}$) $= \frac{2yy}{a} = 2x$ en mettant pour yy ſa valeur ax. D'où il ſuit que ſi l'on prend PT double de AP, & qu'on mene la droite MT, elle ſera tangente au point M. Ce qui étoit propoſé.

FIG. 4. 2°. Soit l'équation $aa = xy$ qui exprime la nature de l'hyperbole entre les aſymptotes. On aura en prenant les différences $xdy + ydx = 0$, & partant + PT ($\frac{ydx}{dy}$) $= -x$. D'où il ſuit que ſi l'on prend $PT = PA$ du côté oppoſé au point A, & qu'on mene la droite MT, elle ſera la tangente en M.

+ Car alors on a $ydx = -xdy$. Et substituant cette valeur de ydx dans celle de PT l'on a $\frac{-xdy}{dy} = -x$.

3°. Soit l'équation générale $y^m = x$ qui exprime la nature de toutes les paraboles à l'infini lorſque l'expoſant m marque un nombre poſitif entier ou rompu, & de toutes les hyperboles lorſqu'il marque un nombre négatif. On aura en prenant les différences $my^{m-1}dy = dx$, & partant PT ($\frac{ydx}{dy}$) $= my^m = mx$ en mettant pour y^m ſa valeur x.

Si $m = \frac{3}{2}$, l'équation sera $y^3 = axx$ qui exprime la nature d'une des paraboles cubiques, & la soutangente $PT = \frac{3}{2}x$. Si $m = -2$, l'équation sera $a^3 = xyy$ qui exprime la nature de l'une des hyperboles cubiques, & la soutangente $PT = -2x$. Il en est ainsi des autres.

Pour mener dans les paraboles la tangente au point A origine des x, il faut chercher quelle doit être la raison de dx à dy en ce point ; car il est visible que cette raison étant connue, l'angle que la tangente fait avec l'axe où le diametre sera aussi déterminé. On a dans cet exemple $dx . dy :: my^{m-1} . 1$. D'où l'on voit que y étant zero en A, la raison de dy à dx doit y être infiniment grande lorsque m surpasse 1, & infiniment petite lorsqu'elle est moindre : c'est à dire que la tangente en A doit être parallele aux appliquées dans le premier cas, & se confondre avec le diametre dans le second.

Cette proportion se tire de l'equation $my^{m-1}dy = dx$

EXEMPLE II.

12. SOIT une ligne courbe AMB telle que $AP \times PB$ $(x \times \overline{a-x})$. $\overline{PM}^2$ $(yy) :: AB\,(a) . AD\,(b)$. Donc $\frac{ayy}{b} = ax - xx$, & en prenant les différences, $\frac{2aydy}{b} = adx - 2xdx$, d'où l'on tire $PT\,(\frac{ydx}{dy}) = \frac{2ayy}{ab - 2bx} = \frac{2ax - 2xx}{a - 2x}$, en mettant pour $\frac{ayy}{b}$ sa valeur $ax - xx$; & $PT - AP$ ou $AT = \frac{ax}{a - 2x}$.

FIG. 5.

Supposant à présent que $\overline{AP}^3 \times \overline{PB}^2$ $(x^3 \times \overline{a-x}^2)$. $\overline{PM}^5$ $(y^5) :: AB\,(a) . AD\,(b)$, on aura $\frac{ay^5}{b} = x^3 \times \overline{a-x}^2$, & en prenant les différences $\frac{5ay^4dy}{b} = 3xxdx \times \overline{a-x}^2 - \overline{2adx + 2xdx} \times x^3$, d'où l'on tire $\frac{ydx}{dy} = \frac{5x^3 \times \overline{a-x}^2}{3xx \times \overline{a-x}^2 - 2a + 2x \times x^3} = \frac{5x \times \overline{a-x}}{3a - 3x - 2x}$ ou $\frac{5ax - 5xx}{3x - 5x}$ & $AT = \frac{2ax}{3a - 5x}$.

⊕ d'abord ... $dx = \frac{\overline{m+n} \times a y^{m+n-1} dy}{bmx^{m-1} \times \overline{a-x}^{n} - bn\overline{a-x}^{n-1} \times x^{m}}$

ensuite $\frac{ydx}{dy}$ = - - - - - - - - - $\frac{\overline{m+n}\, a y^{m+n}}{bmx^{m-1} \times \overline{a-x}^{n} - bn\overline{a-x}^{n-1} \times x^{m}}$

= (mettant au lieu de ay^{m+n} sa valeur $bx^{n} \times \overline{a-x}^{n}$)

$\frac{\overline{m+n} \times bx^{m} \times \overline{a-x}^{n}}{bmx^{m-1} \times \&c.}$

= (divisant par b)

$\frac{\overline{m+n} \times x^{m} \times \overline{a-x}^{n}}{mx^{m-1} \times \&c.}$

= (divisant par $x^{m-1} \times x^{n-1}$)

$\frac{\overline{m+n}\, x \times \overline{a-x}}{m\,\overline{a-x} - nx}$ = PT &c.

Et généralement si l'on veut que m marque l'exposant de la puissance de AP, & n celui de la puissance de PB, on aura $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^{m} \times \overline{a-x}^{n}$ qui est une équation générale pour toutes les ellipses à l'infini, dont la différence est $\frac{\overline{m+n}\, ay^{m+n-1} dy}{b} = mx^{m-1}dx \times \overline{a-x}^{n} - n\overline{a-x}^{n-1} dx \times x^{m}$, ⊕ d'où l'on tire (en mettant pour $\frac{ay^{m+n}}{b}$ sa valeur $x^{m} \times \overline{a-x}^{n}$)

$$PT\left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{\overline{m+n}\, x^{m} \times \overline{a-x}^{n}}{mx^{m-1} \times \overline{a-x}^{n} - n\overline{a-x}^{n-1}} \times x^{m} = \frac{\overline{m+n}\, x \times \overline{a-x}}{m\,\overline{a-x} - nx};$$

ou $PT = \frac{\overline{m+n} \times \overline{ax-xx}}{ma - \overline{m-n}\,x}$, & $AT = \frac{nax}{ma - \overline{m-n}\,x}$.

EXEMPLE III.

FIG. 6. 13. Les mêmes choses étant posées que dans l'exemple précédent, excepté que l'on suppose ici que le point B tombe de l'autre côté du point A par rapport au point P, on aura l'équation $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^{m} \times \overline{a+x}^{n}$ qui exprime la nature de toutes les hyperboles considerées par rapport à leurs diametres. D'où l'on tirera comme ci-dessus $PT = \frac{\overline{m+n} \times \overline{ax+xx}}{ma + \overline{m+n}\,x}$ & $AT \frac{nax}{ma + \overline{m+n}\,x}$.

Maintenant si l'on suppose que AP soit infiniment grande, la tangente TM ne rencontrera la courbe qu'à une distance infinie, c'est à dire qu'elle en deviendra l'asymptote CE; & l'on aura en ce cas $AT\left(\frac{nax}{ma + \overline{m+n}\,x}\right) = \frac{n}{m+n}a = AC$; puisque a étant infiniment moindre que x, le terme ma sera nul par rapport à $\overline{m+n}\,x$. Par la même raison en ce cas l'équation à la courbe deviendra $ay^{m+n} = bx^{m+n}$. Ainsi en faisant pour abréger $m+n=p$, & en extrayant de part & d'autre la racine p, on aura $y\sqrt[p]{a} = x\sqrt[p]{b}$, dont la différence est $dy\sqrt[p]{a} = dx\sqrt[p]{b}$: de sorte qu'en menant AE parallele aux appliquées, & en concevant un petit triangle au point où l'asymptote CE rencontre la courbe, on formera cette proportion dx, dy, ou $\sqrt[p]{a}.\sqrt[p]{b} :: AC.(\frac{n}{p}a).AE = \frac{n}{p}\sqrt[p]{ba^{p-1}}$. Or les car l'on a d'abord — $\frac{aydx}{3yy-ax} = \frac{3xxdx}{3yy-ax}$ Multipl. par $3yy-ax$ et Divisant par dx $ay = 3xx$ $y = \frac{3xx}{a}$.

& $dy = \frac{aydx - 3xxdx}{3yy - ax} = o$ lorſque le point P tombe ſur le point cherché E, d'où l'on tire $y = \frac{3xx}{a}$; & ſubſtituant cette valeur à la place de y dans l'équation $x^3 + y^3 = axy$, on trouve pour AE une valeur $x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$ telle que l'appliquée ED ſera plus grande que toutes ſes ſemblables PM.

EXEMPLE II.

49. SOIT $y - a = a^{\frac{1}{3}} \times \overline{a - x}^{\frac{2}{3}}$, l'équation qui exprime la nature de la courbe MDM. On aura en prenant les différences, $dy = -\frac{2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}}$ que j'égale d'abord à zero; mais parce que cette ſuppoſition me donne $-2dx\sqrt[3]{a} = o$ qui ne peut faire connoître la valeur de AE, j'égale enſuite $\frac{-2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}}$ à l'infini, ce qui me donne $3\sqrt[3]{a-x} = o$; d'où l'on tire $x = a$, qui eſt la valeur cherchée de AE. FIG. 33.

EXEMPLE III.

50. SOIT une demie roulette accourcie AMF, dont la baſe BF eſt moindre que la demi-circonférence ANB du cercle générateur qui a pour centre le point C. Il faut déterminer le point E ſur le diametre AB, en ſorte que l'appliquée ED ſoit la plus grande qu'il eſt poſſible. FIG. 36.

Ayant mené à diſcretion l'appliquée PM qui coupe le demi-cercle en N, on concevra à l'ordinaire aux points M, N, les petits triangles MRm, NSn, & nommant les indéterminées AP, x; PN, z; l'arc AN, u; & les données ANB, a; BF, b; CA ou CN, c; l'on aura par la propriété de la roulette $ANB\,(a) . BF\,(b) :: AN\,(u) . NM = \frac{bu}{a}$. Donc $PM = z + \frac{bu}{a}$, & ſa différence $Rm = \frac{adz + bdu}{a} = o$ lorſque le point P tombe au point cherché E. Or les triangles réctangles NSn, NPC ſont ſemblables; car ſi l'on ôte des angles droits CNn, PNS l'angle commun CNS, les reſtes SNn, PNC ſeront égaux. Et partant $CN\,(c) . CP$

dans une sphére déterminer celui qui a la plus grande surface convexe.

FIG. 40. La question se réduit à déterminer sur le diametre AB du demi-cercle AFB le point E, en sorte qu'ayant mené la perpendiculaire EF, & joint AF, le rectangle $AF \times FE$ soit le plus grand de tous ses semblables $AN \times NP$. Car si l'on conçoit que le demi-cercle AFB fasse une révolution entiére autour du diametre AB, il est clair qu'il décrira une sphére, & que les triangles réctangles AEF, APN décriront des cones inscrits dans cette sphére, dont les surfaces convexes décrites par les cordes AE, AN, seront entr'elles comme les réctangles $AF \times FE$, $AN \times NP$.

eb est $\overline{a-x}$;
$\overline{ef}^2 = ax-xx$
$\overline{af}^2 = \overline{ae}^2+\overline{ef}^2 = ax$
$af = \sqrt{ax}$

Soit donc l'inconnue $AE = x$, la donnée $AB = a$, on aura par la proprieté du cercle $AF = \sqrt{ax}$, $EF = \sqrt{ax - xx}$; & partant $AF \times FE = \sqrt{aaxx - ax^3}$ qui doit être un *plus grand*. C'est pourquoi on imaginera une ligne courbe MDM telle que la relation de l'appliquée $PM\,(y)$ à la coupée $AP\,(x)$ soit exprimée par l'équation $\frac{\sqrt{aaxx - ax^3}}{a} = y$; & l'on cherchera le point E, en sorte que l'appliquée ED soit plus grande que toutes ses semblables PM. On aura donc en prenant la différence $\frac{2aaxdx - 3axxdx}{2\sqrt{aaxx - ax^3}} = o$, d'où l'on tire $AE\,(x) = \frac{2}{3}a$.

EXEMPLE VII.

54. ON demande entre tous les Parallélépipedes égaux à un cube donné a^3, & qui ont pour un de leurs côtés la droite donnée b, celui qui a la moindre superficie.

Nommant x un des deux côtés que l'on cherche, l'autre sera $\frac{a^3}{bx}$; & prenant les plans alternatifs des trois côtés b, x, $\frac{a^3}{bx}$ du parallélépipede, leur somme sçavoir $bx + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{b}$ sera la moitié de sa superficie qui doit être *un moindre*. C'est pourquoi concevant à l'ordinaire une ligne courbe qui ait pour équation $\frac{bx}{a} + \frac{aa}{x} + \frac{aa}{b} = y$, l'on trou-